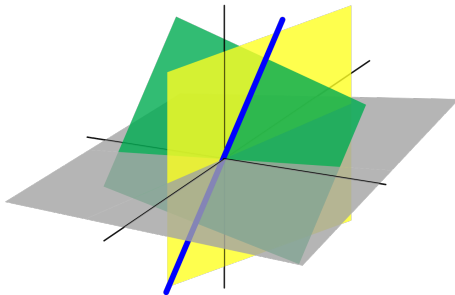


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 28 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



Examen blanc

3,28

moyenne

Question 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\lambda = 2$ est une valeur propre de A avec multiplicité géométrique 2
- ☐ toutes les valeurs propres de A ont la même multiplicité algébrique
- ☒ toutes les valeurs propres de A ont la même multiplicité géométrique
- ☐ $\lambda = 4$ est une valeur propre de A avec multiplicité algébrique 2

$$C_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (4-t)(3-t)(2-t)^2$$

$$E_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{de dim } 1.$$

Question 7: La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☐ est diagonalisable mais pas inversible

☐ est inversible et diagonalisable

☐ n'est ni inversible ni diagonalisable

☒ est inversible mais pas diagonalisable

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ inversible
seule valeur propre 1, $\text{mult}(1) = 3$
 $\dim E_1 = 1$

Question 13: Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3$.

$$1 - p(0) = 0 \Leftrightarrow p(0) = 1 \quad 0 \neq \dots$$

□ VRAI

☐ VRAI ~~☐~~ FAUX

Question 14: Soit $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

□ VRAI

☐ VRAI ☒ FAUX

$$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$ lin indep
$$(A\hat{e}_1, A\hat{e}_2, A\hat{e}_3) \neq \vec{0}$$

QUIZ 1. VALEURS PROPRES

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont

- (A) 1, 2 et 3
- (B) 2, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
- (C) -1, -2 et -3
- (D) -2, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

QUIZ 2. LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Si $c_A(t) = (t - 2)^4(t + 3)^2(t - 7)$, laquelle des quatre affirmations suivantes est toujours vraie ?

- (A) $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_7) = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - 3I_7) = 1$
- (B) $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_7) = 4$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - 7I_7) = 1$
- (C) $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - 7I_7) = 1$
- (D) $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - 7I_7) = 1$

QUIZ 3. POLYNÔMES SCINDÉS

DÉFINITION

Un polynôme $p(t)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ est dit **scindé sur $\mathbb{F}_2$** s'il s'écrit comme produit de facteurs de la forme $t - \lambda$ pour des $\lambda \in \mathbb{F}_2$.

On considère le polynôme $p(t) = t^2 + 1$. Laquelle des affirmations suivantes est vraie :

- (A) $p(t)$ est scindé sur $\mathbb{F}_2$ et $p(t)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
- (B) $p(t)$ est scindé sur $\mathbb{F}_2$ et $p(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
- (C) $p(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{F}_2$ et $p(t)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
- (D) $p(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{F}_2$ et $p(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

5.6.1 APPLICATION : CALCUL DE PUISSANCES

Soit A une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}$$

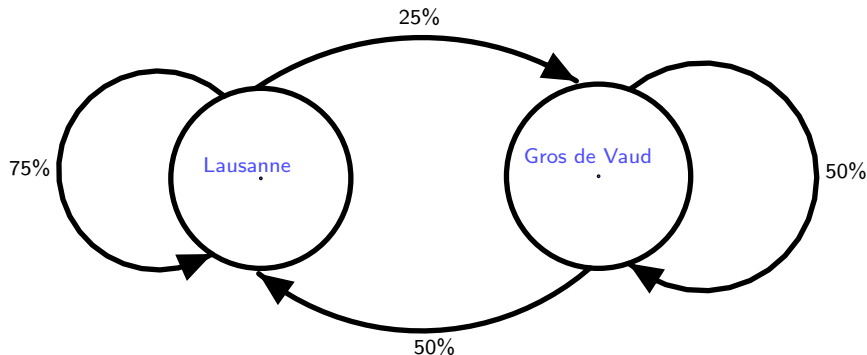
Mais alors on a aussi

$$A^2 = P \underbrace{D P^{-1} P}_{I_n} D P^{-1} = PD^2 P^{-1} \quad \text{et} \quad A^k = PD^k P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS

On étudie les populations de Lausanne et du Gros de Vaud. La situation (sans lien avec la réalité du canton) est représentée par la situation suivante :



Appelons u_k la population urbaine l'année k (en pourcents) et r_k la population rurale.

5.6.2 ÉVOLUTION DE POPULATIONS : MODÈLE

$$\begin{cases} u_{R+1} = \frac{3}{4} u_R + \frac{1}{2} r_R \\ r_{R+1} = \frac{1}{4} u_R + \frac{1}{2} r_R \end{cases}$$

5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS II

Nous avons modélisé matriciellement cette situation et posons

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi}$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

Pour comprendre ce qui se passe dans le futur (lointain), il faut donc calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS III

Nous calculons

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

❶ $c_A(t) = (t - 1)(t - 1/4)$

❷ $E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_{1/4} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

❸ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A

❹ $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = (Id)_{\text{can}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

❺ **Formule de changement de base** : $A^k = P D^k P^{-1}$.

5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS IV

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 1/4^k & 2 - 1/4^{k-1} \\ 1 - 1/4^k & 1 + 1/4^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 (2 + 1/4^k) u_0 + \frac{1}{3} (2 - 1/4^{k-1}) r_0 \\ 1/3 (1 - 1/4^k) u_0 + \frac{1}{3} (1 + 1/4^{k-1}) r_0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\lim_{k \rightarrow \infty}$. On appelle $P_0 = u_0 + r_0$ la population totale.

comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4^k} = 0$

$$u_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 1/3 \cdot 2 u_0 + 1/3 \cdot 2 r_0 = 2/3 \cdot P_0$$

$$r_{\infty} = 1/3 P_0.$$

CHAPITRE 6 : ORTHOGONALITÉ

- ❶ $\mathbb{R}^n$ est non seulement un espace vectoriel, c'est un espace euclidien.
- ❷ Nous avons une notion de distance et d'angle.
- ❸ La base canonique est composée de vecteurs orthogonaux deux à deux et unitaires (de longueur 1).

6.1.1 LE PRODUIT SCALAIRE

DÉFINITION

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire** est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

PROPRIÉTÉS

- ❶ **Commutativité.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ❷ **Distributivité.** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ❸ **Compatibilité action.** $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v}$
- ❹ $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Preuve. Les propriétés 1-3 sont celles de la multiplication de matrices. Pour 4, $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$. On a l'égalité si et seulement si tous les $u_i = 0$. □

6.1.2 LA NORME

DÉFINITION

La **longueur** ou **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

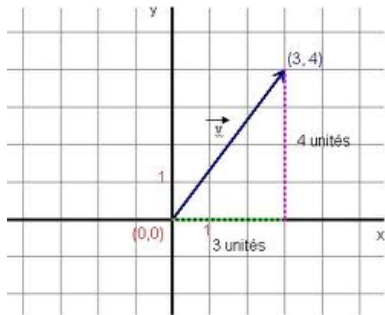
Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**. Pour normaliser un vecteur non nul, i.e. pour le rendre unitaire, il suffit de le diviser par sa norme :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix} u_1 / \|\vec{u}\| \\ \vdots \\ u_n / \|\vec{u}\| \end{pmatrix} \text{ est unitaire}$$

6.1.3 THÉORÈME DE PYTHAGORE CLASSIQUE

Dans $\mathbb{R}^2$ la norme d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vaut

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle dont les cathètes sont de longueur a et b .

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

6.1.3 EXEMPLES

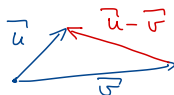
① $\mathbb{R}^2$. Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$

le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \vec{u}$ est unitaire car $\left\| \dots \right\|^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$.

Il existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ tq $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$.

② $\mathbb{R}^4$. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 49 + 49 + 1} = 10$.

6.1.4 LA DISTANCE



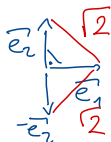
DÉFINITION

La **distance** entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|$$

Exemple. La distance entre $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ est

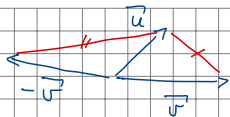
$$d(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



Ces deux vecteurs sont orthogonaux. Comment voit-on cela ? Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la même que la distance entre $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

6.1.4 REMARQUE

Quelles sont les conséquences de l'égalité $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{u}, -\vec{v})$?



Si $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} - (-\vec{v})\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$,
alors $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ (et réciproquement)
car $d(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$.

Par déf. de la norme: $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

Par distributivité de $\cdot$:

$$\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

comm. de $\cdot$.

$$\Leftrightarrow -2 \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

6.1.5 ORTHOGONALITÉ

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$

THÉORÈME DE PYTHAGORE

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2. \quad \text{car } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Notation. Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. On note $W^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à W . Ainsi

$$\boxed{W^\perp = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ pour tout } \vec{w} \in W\}}.$$

C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ (série 11).

6.1.5 EXEMPLE

Soit W le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation

$2x - y + 3z = 0$. On veut décrire ce plan et $W^\perp$.

On choisit une base de W : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

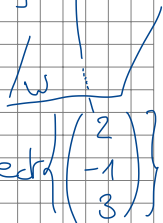
$$W^\perp = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W \right\}$$

$$= \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \cdot (\alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\cdot \text{ distr. } = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} \cdot \vec{b}_1 = 0 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2 \right\}$$

$$\text{Si } \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{b}_1 &= a + 2b \\ \vec{u} \cdot \vec{b}_2 &= -3a + 2c \end{aligned}$$

On doit à résoudre $\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -3a + 2c = 0 \end{cases}$, $W^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$



6.1.5 EXEMPLE, SUITE

On observe que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \perp$ plan d'éq. $2x - y + 3z = 0$

En fait $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp$ ————— $ax + by + cz = 0$

car $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$

6.1.5 EXEMPLES

PROPOSITION

La droite perpendiculaire au plan d'équation $ax + by + cz = 0$, et passant par l'origine, dans $\mathbb{R}^3$, est engendrée par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

THÉORÈME

- ❶ $\text{Ker}A = (\text{Lign}A)^\perp$;
- ❷ $(\text{Im}A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

Preuve.

- ❶ $A \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} \perp \text{chaque ligne de } A$.
- ❷ $\text{Im}A = \text{Col}A = \text{Lign}(A^T)$ et $[\text{Lign}(A^T)]^\perp = \text{Ker}(A^T)$.



6.1.6 CALCUL D'ANGLES

Le produit scalaire permet aussi de calculer l'angle entre deux vecteurs.

LOI DU COSINUS

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est

- ❶ nul quand $\cos \alpha = 0$, i.e. les vecteurs sont perpendiculaires ;
- ❷ maximal quand $\cos \alpha = 1$, i.e. les vecteurs sont colinéaires et de même sens ;
- ❸ minimal quand $\cos \alpha = -1$, i.e. les vecteurs sont colinéaires et de sens opposé.

6.2.1 FAMILLES ORTHOGONALES

DÉFINITION

Une famille $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tous $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Exemple. La base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est orthonormée. En général on appelle **base orthogonale** de W une famille orthogonale ordonnée qui forme une base de W . De même pour une **base orthonormée**.

THÉORÈME

Une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.

6.2.1 PREUVE

Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$ avec $\vec{u}_i \neq \vec{0} \quad \forall 1 \leq i \leq k$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

et supposons $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}$. On doit montrer que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

On calcule $0 = (\underbrace{\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k}_{=\vec{0}}) \cdot \vec{u}_i$ pour $1 \leq i \leq k$

distr.

=
compatibilité
avec scalaire

$$\alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_i + \dots + \alpha_k \vec{u}_k \cdot \vec{u}_i$$

$$\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$$

$$=$$

$$\alpha_i \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \alpha_i \|\vec{u}_i\|^2$$

si $i \neq j$

> 0 car $\vec{u}_i \neq \vec{0}$

Donc $\alpha_i = 0 \quad \forall i$.

□

6.2.1 FAMILLES ORTHOGONALES

DÉFINITION

Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tous $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Rappel.

- 1 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul :
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$
- 2 Par distributivité du produit scalaire, $\vec{u} \perp \vec{a}$ et $\vec{u} \perp \vec{b}$ implique que $\vec{u} \perp \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

THÉORÈME

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

6.2.2 COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHOGONALE

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base orthogonale de W .

THÉORÈME

Pour tout vecteur $\vec{w} \in W$, on a $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$ et

$$\alpha_j = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}$$

Preuve. On sait que $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$. Alors

$$\vec{w} \cdot \vec{u}_j = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) \cdot \vec{u}_j = \alpha_j \vec{u}_j \cdot \vec{u}_j = \alpha_j \|\vec{u}_j\|^2$$

car $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ si $i \neq j$.



6.2.2 EXEMPLE

On construit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ en commençant avec le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \quad \text{base orthogonale de } W.$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \text{ on cherche } (\vec{v})_{\mathcal{C}}$$